ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ

Э.Р. ГУСЕЙНОВ
Институт Физики АН Азербайджана
370143, Баку, пр. Г. Джавида, 33
(Поступило 12.03.96)

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в слоистой среде, диэлектрическая проницаемость которой является простой периодической функцией в направлении, перпендикулярном поверхности слоев. Получено дисперсионное уравнение и общее решение волнового уравнения в ТЕ и ТМ-поляризациях

Слоистая среда, состоящая из чередующихся слоев с толщинами a, d и с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε, соответственно, является простейшей моделью полупроводниковых сверхрешеток, которые могут использоваться в различных устройствах оптоэлектроники и рентгеновской оптики. С этой точки зрения значительный интерес представляет изучение электромагнитных свойств и поляритонных эффектов в таких системах. В данной работе рассматривается распространение электромагнитных волн в бесконечной слоистой среде, диэлектрическая проницаемость которой является простой периодической функцией координаты z в направлении перпендикулярном поверхности слоев. Аналогичная задача для слоистой системы конечной толщины рассматривалась в [1].

Пусть плоскость xy совпадает с границей раздела слоев типа a и d, а координата $z=z'+N(a+d)$, где z'- это z-координата внутри "нулевой ячейки" - $d\le z'\le a$, $N=0,\pm1,\pm2,...$ Тогда в рассматриваемой модели

$$\varepsilon(z)=\begin{cases}\varepsilon & -d<z'<0\\ \varepsilon_1 & 0<z'<a\end{cases} \tag{1}$$

для любого N, т.е. $\varepsilon(z)$ является периодической функцией с периодом $a+d$. Поскольку в плоскости слоев наша система однородна, можно искать решения уравнений Максвелла в виде плоских волн

$$\vec{E}(\vec{\rho},z,t)=\vec{E}(\vec{k},z,\omega)\,e^{i(\vec{k}\vec{\rho}-\omega t)} \tag{2}$$

где $\vec{\rho}$ и $\vec{k}$-двумерные векторы. Не ограничивая общности, можно считать, что волновой вектор $\vec{k}$ направлен по оси y, т.е. в компонентах $\vec{k}(0,k)$.

Рассмотрим две независимые поляризации - ТЕ-волны и ТМ-волны.

1.ТЕ-волны.

В этом случае Фурье-компонента электрического поля $\vec{E}(\vec{k},z,\omega)$ имеет отличную от нуля только x-проекцию и из уравнений Максвелла следует, что отличны от нуля также y и z-проекции магнитного поля, т.е. $\vec{E}(E,0,0)$ и $\vec{H}(0,H_y,H_z)$, причем E удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\left[\varepsilon(z)\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right]E=0\ , \tag{3}$$

а $H_y=-\dfrac{ic}{\omega}\dfrac{dE}{dz}$ и $H_z=-\dfrac{ck}{\omega}E$.

Решение уравнения (3) в "нулевой ячейке" очевидно

$$E=\begin{cases}A_1e^{i\text{æ}_1z'}+A_2e^{-i\text{æ}_1z'} & 0<z'<a\\ B_1e^{i\text{æ}z'}+B_2e^{-i\text{æ}z'} & -d<z'<0\end{cases} \tag{4}$$

где $\text{æ}=\sqrt{\varepsilon\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}$, $\text{æ}_1=\sqrt{\varepsilon_1\dfrac{\omega^2}{c^2}-k^2}$,

а $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ - произвольные константы.

Для того, чтобы найти решение на всей оси z, воспользуемся теоремой Флоке [2], согласно которой среди решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами должно быть два линейно-независимых, удовлетворяющих условию

$$\varphi_{1,2}(z+N(a+d))=\lambda^N_{1,2}\varphi_{1,2}(z)\ , \tag{5}$$

где $\lambda_{1,2}$- некие константы. Таким образом, зная такие решения в "нулевой ячейке", можно с помощью этой теоремы распространить их на всю ось z и, взяв затем линейную комбинацию этих решений с произвольными коэффициентами, получить общее решение уравнения (3) на всей оси.

Константы $\lambda_{1,2}$ можно представить в виде

$$\lambda_{1,2}=e^{ik_z^{(1,2)}(a+d)}\ , \tag{6}$$

причем величины $k_z^{(1,2)}$ в данном случае должны быть действительными, поскольку мы ищем ограниченные на $\pm\infty$ решения.

На всех границах слоев должны сшиваться тангенциальные составляющие полей. Сшивание E и H_y в точке $z=0$ дает возможность выразить $B_{1,2}$ через $A_{1,2}$, а сшивание на границе двух "ячеек" в точке a приводит к однородной системе уравнений для $A_{1,2}$, условие разрешимости которой дает дисперсионное уравнение

$$k_z^{(1,2)}(a+d) = \pm \arccos\left[\cos æd \cos æ_1 a - \frac{1}{2}\left(\frac{æ_1}{æ} + \frac{æ}{æ_1}\right)\sin æd \sin æ_1 a\right] = \pm k_z(a+d) \quad , \tag{7}$$

связывающее ω, k и k_z.

Величина $\pm k_z(a+d)$ определяет разность фаз в соседних ячейках. При заданных ω и k она фиксируется дисперсионным уравнением (7). Если же задавать эту разность фаз, т.е. k_z и k, то дисперсионное уравнение определяет зависимость $\omega(k, k_z)$ в области существования ТЕ-волн

$$\left|\cos æd \cos æ_1 a - \frac{1}{2}\left(\frac{æ_1}{æ} + \frac{æ}{æ_1}\right)\sin æd \sin æ_1 a\right| \le 1 \tag{8}$$

Таким образом, общее решение уравнения (3), удовлетворяющее всем граничным условиям, запишется в виде

$$E(z) = Ae^{ik_z(a+d)N}E(z') + Be^{-ik_z(a+d)N}E^*(z'), \tag{9}$$

где

$$E(z') = \begin{cases} e^{iæ_1 z'} + \gamma e^{-iæ_1 z'} & 0 \le z' \le a \\ \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{æ_1}{æ}\right) + \left(1-\frac{æ_1}{æ}\right)\gamma\right]e^{iæz'} + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{æ_1}{æ}\right) + \left(1+\frac{æ_1}{æ}\right)\gamma\right]e^{-iæz'} & -d \le z' \le 0 \end{cases}$$

(10)

$$\gamma = -\frac{e^{ik_z(a+d)}\left(\cos æd - i\frac{æ_1}{æ}\sin æd\right) - e^{iæ_1 a}}{e^{ik_z(a+d)}\left(\cos æd + i\frac{æ_1}{æ}\sin æd\right) - e^{-iæ_1 a}} \quad , \tag{11}$$

а A и B - произвольные константы.

2. ТМ-волны.

В этом случае отличны от нуля проекции полей H_x, E_y и E_z, т.е. $\vec{H}(H,0,0)$ и $\vec{E}(0,E_y,E_z)$, причем H удовлетворяет такому же уравнению, как и (3), а

$$E_y = \frac{ic}{\omega\varepsilon(z)}\frac{dH}{dz} \quad , \quad E_z = -\frac{ck}{\omega\varepsilon(z)}H.$$

Аналогия со случаем ТЕ-волн нарушается при сшивании тангенциальных компонент полей, что видоизменяет дисперсионное уравнение. В данном случае оно имеет вид

$$k_z^{(1,2)}(a+d) = \pm \arccos\left[\cos æd \cos æ_1 a - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\frac{æ_1}{æ} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\frac{æ}{æ_1}\right)\sin æd \sin æ_1 a\right] = \pm k_z(a+d) \quad , \tag{12}$$

Условие существования ТМ-волн также видоизменяется. Выражение в квадратных скобках в (12) должно быть по модулю ≤1. Общее же решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, в данном случае имеет вид

$$H(z) = Ae^{ik_z(a+d)N}H(z') + Be^{-ik_z(a+d)N}H^*(z') \tag{13}$$

$$H(z')=\begin{cases} e^{i\text{æ}_1 z'}+\gamma' e^{-i\text{æ}_1 z'} & 0\le z'\le a \\ \dfrac{1}{2}\left[\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\right)+\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\right)\gamma'\right]e^{i\text{æ}z'}+\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\right)+\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\right)\gamma'\right]e^{-i\text{æ}z'} & -d\le z'\le 0 \end{cases} \quad (14)$$

и

$$\gamma'=-\frac{e^{ik_z(a+d)}\left(\cos\text{æ}d-i\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\sin\text{æ}d\right)-e^{i\text{æ}_1 a}}{e^{ik_z(a+d)}\left(\cos\text{æ}d+i\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\dfrac{\text{æ}_1}{\text{æ}}\sin\text{æ}d\right)-e^{-i\text{æ}_1 a}}, \quad (15)$$

В пределе, когда $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\text{æ}=\text{æ}_1$, дисперсионное уравнение для обеих поляризаций дает обычный трехмерный закон дисперсии в однородной среде

$$\omega=c\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\left(k^2+k_z^2\right)} \quad .$$

а сами волны превращаются в обычные плоские волны.

[1] *М. Борн, Э. Вольф.* Основы оптики, 1970, Москва, Наука.

[2] *Э.Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 1961,Москва, Физматгиз.

E.R. Hüseynov

SONSUZ İFRATQƏFƏSDƏ ELEKTROMAQNİT DALĞALARI

Laylara perpendikulyar istiqamətdə dielektrik sabiti sadə periodik funksiya olan laylı mühitdə elektromaqnit dalğalarının yayılmasına baxılmışdır. TE və TM-polyarizasiyalarında dispersiya tənliyi və dalğa tənliyinin ümumi həlli alınmışdır.

E.R. Guseinov

THE ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE INFINITE SUPERLATTICE

The spreading of the electromagnetic waves in the layered medium, which dielectric constant is the simple periodic function in the perpendicular direction to the layers is considered. The dispersion equation and the common solution of the wave equation for TE and TM-polarizations are obtained.

Редактор: Ю.М. Сеидов